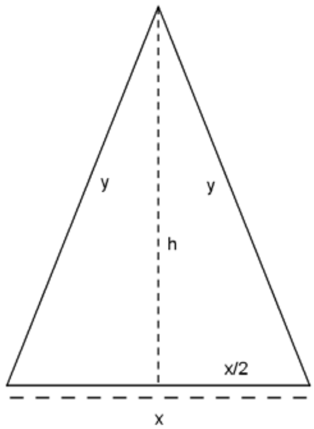
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Septiembre 2011

[2'5 puntos] Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Solución

Es un problema de optimización



Función a optimizar: Área = (1/2)base.altura = (1/2).x.h

Relación entre las variables: Perímetro = 8 = x + 2y, de donde y = 8/2 – x/2 = 4 – x/2.
También tenemos es cuenta que tenemos dos triángulos rectángulos y podemos aplicar el Teorema de Pitágoras. $h^2 = y^2 - (x/2)^2 = (4 - (x/2))^2 - (x/2)^2 = 16 - 4x + x^2/4 - x^2/4 = -4x + 16$, de donde como "h" es una longitud (es positiva) tenemos $h = \sqrt{-4x+16}$

$A(x) = (1/2).x.h = (1/2).x.\sqrt{-4x+16}$

Si A'(b) = 0 y A''(b) < 0, x = b es un máximo de A(x).

$A(x) = (1/2).x.h = (1/2).x.\sqrt{-4x+16}$

$$A'(x) = (1/2).\sqrt{-4x+16} + (1/2).x.\frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}} = (1/2).\sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}.$$

De A'(x) = 0, tenemos $(1/2).\sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}} = 0$, es decir $(1/2).\sqrt{-4x+16} = \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}$, por tanto
(– 4x+16) = 2x, luego 6x = 16. "x" = 16/6 = "8/3" y "y" = 4 – (8/3)/2 = 4 – 4/3 = "8/3".
Si nos damos cuenta es un triángulo equilátero.
Es decir **las dimensiones del triángulo son x = 8/3, y = 8/3** y **su área es** $(1/2).x.\sqrt{-4x+16} = (1/2).(8/3).\sqrt{-4(8/3)+16} = = (4/3).\sqrt{16/3} = \frac{16}{3\sqrt{3}}\ u^2$.

Veamos para terminar que es un máximo, es decir A''(8/3) < 0

$$A'(x) = (1/2).\sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}.$$

$$A''(x) = \left(\frac{1}{2}\right).\frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}} - \frac{\sqrt{-4x+16} - x.\frac{-4}{2.\sqrt{-4x+16}}}{(\sqrt{-4x+16})^2} = \frac{-1}{\sqrt{-4x+16}} - \frac{\sqrt{-4x+16} + \frac{2x}{\sqrt{-4x+16}}}{-4x+16}$$, de donde

$$A''(8/3) = \frac{-1}{\sqrt{16/3}} - \frac{\sqrt{16/3} + \frac{2(8/3)}{\sqrt{16/3}}}{16/3}$$ < 0 (estamos sumando dos números negativos), luego es un máximo.

Ejercicio 2 opción A, modelo Septiembre 2011

Considera las funciones f, g: R → R definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.

(a) [0'75 puntos] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

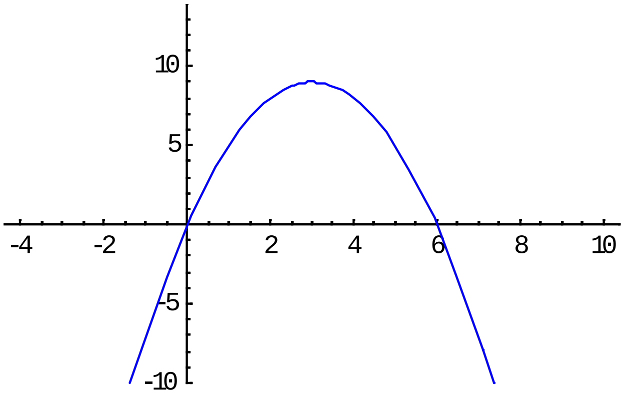
(a)

La gráfica de $f(x) = 6x - x^2$ (a= -1, b= 6, c= 0), es la de una parábola con las ramas hacia abajo (a= -1<0), abscisa del vértice en x = -b/2a = -6/-2 = 3, y ordenada en $f(3) = 6(3) - (3)^2 = 9$ [V = (3,9)]. Cortes con los ejes en:

Para x = 0, $f(0) = 6(0) - (0)^2 = 0$. Punto (0,0), corte con OY.

Para f(x) = 0, $6(x) - (x)^2 = 0 = x(6 - x)$, de donde x = 0 y x = 6. Puntos (0,0) y (6,0), corte con OX.

Un esbozo de su gráfica es

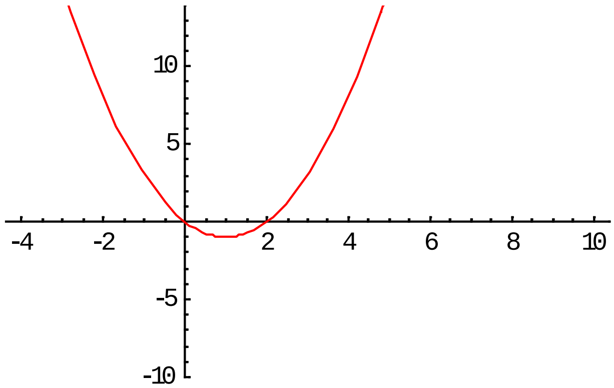


La gráfica de $g(x) = x^2 - 2x$ (a= 1, b= -2, c= 0), es la de una parábola con las ramas hacia arriba (a= 1>0), abscisa del vértice en x = -b/2a = 2/2 = 1, y ordenada en $f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$ [V = (1,-1)]. Cortes con los ejes en:

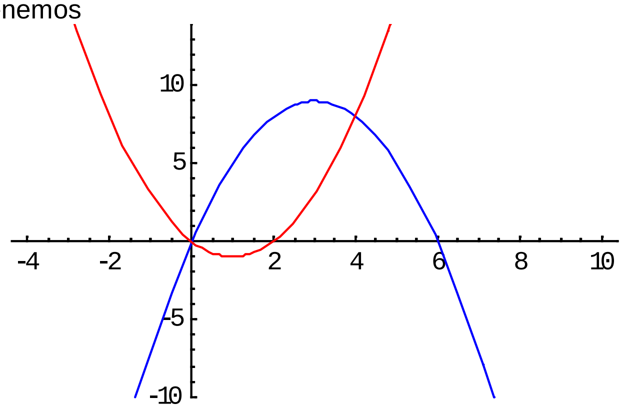
Para x = 0, $f(0) = (0)^2 - 2(0) = 0$. Punto (0,0), corte con OY.

Para f(x) = 0, $(x)^2 - 2(x) = 0 = x(x - 2)$, de donde x = 0 y x = 2. Puntos (0,0) y (2,0), corte con OX.

Un esbozo de su gráfica es



Juntando ambas gráficas tenemos



Para calcular sus puntos de corte resolvemos la ecuación f(x) = g(x), es decir $6x - x^2 = x^2 - 2x$.

De $6x - x^2 = x^2 - 2x$, tenemos $2x^2 - 8x = 0 = x(2x - 8)$, luego x = 0 y x = 4. Puntos (0,0) y (4,8).

(b)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Observando las gráficas el área que me están pidiendo es:

Área = $\int_0^4 (f(x) - g(x))dx = \int_0^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 =$

$= \left(\frac{-2(4)^3}{3} + 4(4)^2\right) - (0) = 64/3\ u^2.$

Ejercicio 3 opción A, modelo Septiembre 2011

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'75 puntos] Calcula el rango de dependiendo de los valores de α.
(b) [0'75 puntos] Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial A.X = B.

Solución

(a)
Calcula el rango de dependiendo de los valores de α.
Para estudiar el rango de A estudiamos su determinante |A|.

$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix}_{F_3+F_2} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= (0) - (\alpha-1)(-\alpha+1) + (\alpha-1)(\alpha^2 - 1) =$

$= (\alpha-1)[(\alpha-1) + (\alpha-1)(\alpha + 1)] = (\alpha-1).(\alpha-1).(\alpha+2).$

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$, tenemos $|A| \neq 0$, por tanto rango(A) = 3.

Si $\alpha = 1$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, y como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2-F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resulta que rango(A) = 1, pues nos queda sólo un fila con elementos no nulos.

Si $\alpha = -2$, tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 \neq 0$, luego rango(A) = 2.

(b)
Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial A.X = B.
Según el estudio del aparatado (a), para $\alpha = 2$, $|A| = (2-1).(2-1).(2+2) = 4 \neq 0$ y existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$.
Multiplicando A.X = B por la izquierda por la inversa A^{-1}, tenemos $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$, de donde $I_2.X = A^{-1}.B$, por tanto la matriz pedida es $X = A^{-1}.B$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$, pues es una matriz simétrica; $Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es $A^{-1} = (1/4).\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Luego $\mathbf{X} = A^{-1}.B = (1/4).\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/4).\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo Septiembre 2011

Considera los puntos A(-1,k,3), B(k+1,0,2), C(1,2,0) y D(2,0,1).
(a) [1'25 puntos] ¿Existe algún valor de k para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes?
(b) [1'25 puntos] Calcula los valores de k para que los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1.

Solución

(a)
¿Existe algún valor de k para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes?
A(-1,k,3), B(k+1,0,2), C(1,2,0) y D(2,0,1).

Para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes, como son vectores de tres coordenadas, tenemos que ver que el determinante det(**AB**, **BC**, **CD**) sea 0.

AB = (k+1-(-1), 0-k, 2-3) = (k+2, -k, -1)
BC = (1-(k+1),2-0,0-2) = (-k, 2, -2)
CD = (2-1,0-2,1-0) = (1, -2, 1)

$$\det(\mathbf{AB},\mathbf{BC},\mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2-2.C_1 \\ C_3+C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -3k-4 & 2+2k & 0 \\ k+3 & -2-k & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix} = +(-1)(\,(-3k-4)(-2-k) - (k+3)(2+2k)\,) =$$

$= - (\,6k+3k^2+8+4k - (2k+2k^2+6+6k)\,) = - (\,+2k+k^2+2) = -k^2 -2k -2.$

Resolvemos $-k^2 -2k -2 = 0$, tenemos $k^2 + 2k + 2 = 0$. $k = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}$, que **no tiene solución real**.

Luego **no hay ningún valor de k**, *para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes*.
(b)
Calcula los valores de k para que los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1.
Sabemos que el volumen de un tetraedro es (1/6) del volumen del paralelepípedo que determinan tres vectores con el mismo origen, es decir (1/6) del valor absoluto del producto mixto de **AB**, **AC** y **AD** (lo indicaremos entre corchetes{ }).

Volumen = 1 = (1/6).**|** { **AB**, **AC**, **AD** } **|**

AB = (k+1-(-1), 0-k, 2-3) = (k+2, -k, -1)
AC = (1-(-1),2-k,0-3) = (2, 2-k, -3)
AD = (2-(-1),0-k,1-3) = (3, -k, -2)

$$\{\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD}\} = \det(\mathbf{AB},\mathbf{BC},\mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (k+2)(-4+2k-3k) - (-k)(5) + (-1)(-2k-6+3k) =$$

$= (k+2)(-4-k) +5k+6-k = -4k -k^2 -8 -2k +4k + 6 = -k^2 -2k-2.$
Resolvemos 1 = (1/6).**|** { **AB**, **AC**, **AD** } **|**, luego 6 = **|** $-k^2$ -2k-2 **|**, lo cual me da lugar a dos ecuaciones:

Primera: $-k^2 - 2k-2 = 6$; $k^2+2k+8 = 0$; $k = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-32}}{2}$, que **no tiene solución real**.

Segunda: $-k^2 - 2k - 2 = -6$; $k^2 +2k - 4 = 0$; $k = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+16}}{2} = -1\pm\sqrt{5}$.

Los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1 si "k = $-1-\sqrt{5}$ ó **k =** $-1+\sqrt{5}$ **"**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Septiembre 2011

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$ para $x \neq 0$.
(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.
(b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

(a)
Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a+} [\,(f(x)\,] = \infty$

Como $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \dfrac{3x^4+1}{x^3} = [\,1/0^-\,] = -\infty$; la recta **x = 0** es una A.V. de f(x).

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} \dfrac{3x^4+1}{x^3} = [\,1/0^+\,] = +\infty$

Como en la función que me han dado el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma y = mx+n con $m = \lim_{x\to\infty} [f(x)/x)]$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx)]$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.
Lo vamos a realizar por división

$3x^4 + 1$	x^3
$-3x^4$	$3x$
$0 \ + \ 1$	

La A.O. de f(x) es **y = 3x** en $\pm\infty$.
Como $\lim_{x\to\infty} [f(x) - 3x)] = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)
Como $\lim_{x\to\infty} [f(x) - 3x)] = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 100)
Si hay es este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)
(b)
Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x)

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{12x^3.x^3 - (3x^4 + 1).3x^2}{\left(x^3\right)^2} = \frac{3x^2(4x^4 - 3x^4 - 1)}{x^6} = \frac{3x^2(x^4 - 1)}{x^6}$$

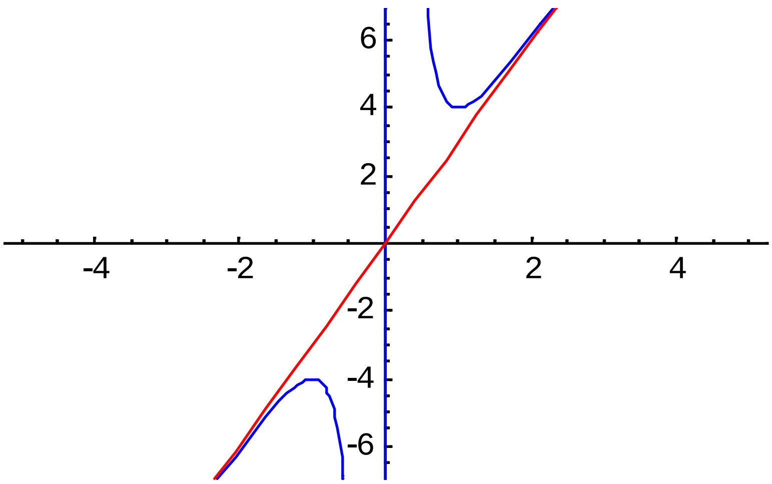
Si f '(x) = 0; $3x^2.(x^4 - 1) = 0$, de donde $x^2 = 0$ (no vale, porque x = 0 es A.V.) y $x^4 - 1 = 0$, de donde $x = \pm 1$.

Como f '(-2) = f '(2) = 180/(+) > 0, f'(x) > 0 en x < - 1 y x > 1, luego f(x) es estrictamente creciente en $(-\infty,-1)$ y también en $(1,+\infty)$.

Como f '(0'1) = (-0'0299)/(+) < 0, f'(x) < 0 en (-1,1)-{0}, luego f(x) es estrictamente decreciente en (-1,1)-{0}

Por definición en x = - 1 hay un máximo relativo que vale f(- 1) = - 4.
Por definición en x = + 1hay un mínimo relativo que vale f(1) = 4.

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica es :



Ejercicio 2 opción B, modelo Septiembre 2011

Sean f, g: R → R las funciones definidas por $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.
(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -2.
(b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta y = x + 5. Calcula el área de este recinto.

Solución

(a)
Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$ en el punto de abscisa x = -2.

Sabemos que la recta tangente de f en x = -2 es " y – f(-2) = f'(-2).(x – (-2))"
$f(x) = -(1/4)x^2 + 4$, luego f(-2) = -1+4 = 3
f'(x) = -x/2, luego f'(-2) = 1, por **la recta tangente es** y – 3 = 1.(x + 2). Operando sale **y = x + 5**.

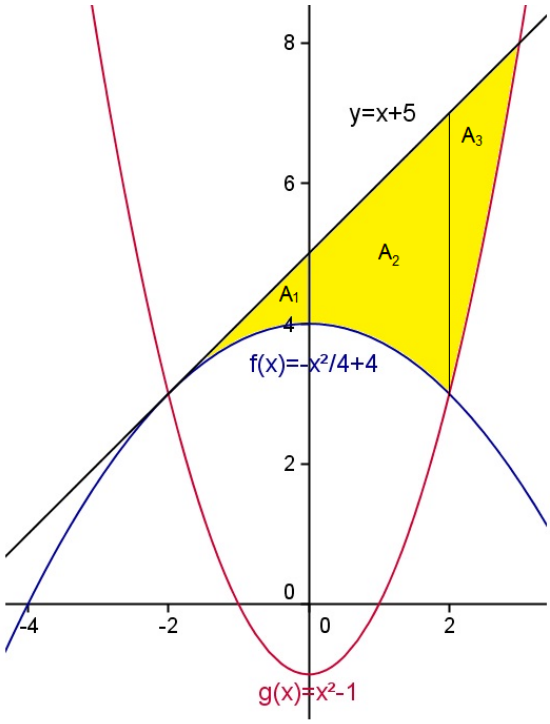
(b)
Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.

La gráfica de $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$ (a= -1/4, b= 0, c= 4), es la de una parábola muy parecida a "$-x^2$" (ramas hacia abajo y con vértice en (0,0)), pero un poco más abierta (al estar multiplicada por 1/4) y desplazada "4" unidades hacia arriba en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en (0,4).

La gráfica de $g(x) = x^2 - 1$ (a= 1, b= 0, c= -1), es la de una parábola igual que "x^2" (ramas hacia arriba y con vértice en (0,0)), y desplazada "1" unidades hacia abajo en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en (0,-1).

La gráfica de $y = x + 5$, es la de una recta y con dos puntos es suficiente, para dibujarla. Hemos visto que era la recta tangente a f en x = -2.

Un esbozo de las gráficas pedidas es:



Donde me piden el área de la región en amarillo, que he dividido en tres áreas A_1, A_2 y A_3.
Área pedida es $A = A_1 + A_2 + A_3$.

$A_1 + A_2 = \int_{-2}^{b}[(x+5)-(-\frac{x^2}{4}+4)]dx$, donde "b" es el corte de $f(x) = -x^2/4+4$ con $g(x) = x^2-1$. (sólo solución positiva)

Igualando $-x^2/4+4 = x^2 - 1$, de donde $-x^2 + 16 = 4x^2 + 4$, es decir $5x^2 = 20$, luego $x = \pm 2$, y **b = 2.**

$A_1 + A_2 = \int_{-2}^{b}[(x+5)-(-\frac{x^2}{4}+4)]dx = \int_{-2}^{2}[\frac{x^2}{4}+x + 1]dx = \left[\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{2} = (8/12+2+2)-(-8/12+2-2) = 16/3\ u^2$.

$A_3 = \int_{2}^{c}[(x+5)-(x^2-1)]dx$, donde "c" es el corte de $y = x+5$ con $g(x) = x^2-1$. (sólo solución mayor de 2).

Igualando $x+5 = x^2 - 1$, de donde $x^2 - x - 6 = 0$, luego $x = -2$ y $x = 3$, por tanto **c = 3.**

$A_3 = \int_{2}^{c}[(x+5)-(x^2-1)]dx = \int_{2}^{3}[-x^2+ x + 6]dx = \left[\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{2}^{3} = (-9 +9/2 + 18)-(-8/3+2+12) = 13/6\ u^2$.

El área pedida es $A = A_1 + A_2 + A_3 = 16/3 + 13/6 = 15/2\ u^2$.

Ejercicio 3 opción B, modelo Septiembre 2011

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es (1/12).A.

(b) [1'25 puntos] Para α = -3, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t.X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución

(a)

Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es (1/12).A.

Sabemos que existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$, si $det(A) = |A| \neq 0$.

$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha+\alpha = 4\alpha$,, luego $\alpha \neq 0$. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (1/4\alpha).\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Me dice que $A^{-1} = (1/12).A$, es decir $\begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (1/12).\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha/12 & 1/12 \\ -\alpha/12 & 3/12 \end{pmatrix}$.

Igualando miembro a miembro tenemos:

De $3/4\alpha = \alpha/12$, tenemos $36 = 4\alpha^2$, de donde $\alpha^2 = 9$, y por tanto $\alpha = \pm 3$.

De $-1/4\alpha = 1/12$, tenemos $-12 = 4\alpha$, de donde $\alpha = -3$.

De $1/4 = -\alpha/12$, tenemos $12 = -4\alpha$, de donde $\alpha = -3$.

De $1/4 = 3/12$, tenemos $12 = 12$, lo cual es cierto.

El único valor de α que verifica todas las igualdades es $\alpha = -3$.

(b)

Para α = -3, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t.X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Sabemos por las propiedades de las matrices que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Para α = -3, tenemos $A^{-1} = (1/12).\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} = (1/12).\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, y por tanto $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = (1/12).\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Multiplicando por la izquierda por $(A^t)^{-1}$ la expresión $A^t.X = B$, tenemos $(A^t)^{-1}.A^t.X = (A^t)^{-1}.B$, de donde tenemos $I_2.X = (A^t)^{-1}.B$, es decir $X = (A^t)^{-1}.B = (1/12).\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1/12).\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción B, Septiembre 2011

Dado el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta "r" de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$.

(a) [1'75 puntos] Halla el punto de intersección del plano π y la recta r.

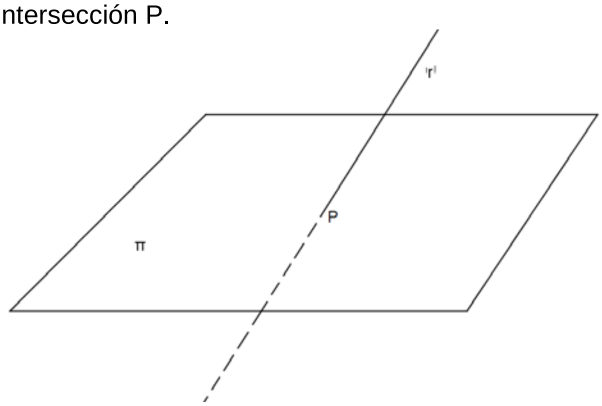
(b) [0'75 puntos] Halla el punto simétrico del punto Q(1,-2,3) respecto del plano π.

Solución

(a)

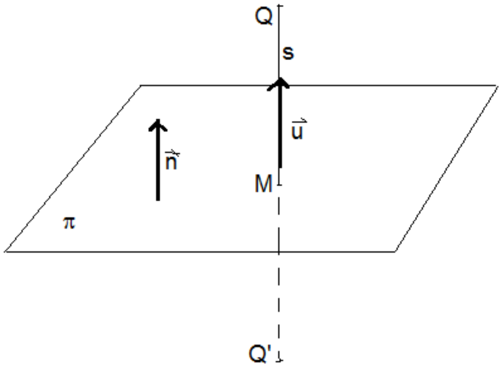
Halla el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + 2y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$.

Ponemos la recta "r" en forma vectorial con un parámetro λ, la sustituimos en el plano π, obtenemos el valor de λ, y después el punto de intersección P.



De la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$, poniendo $x = \lambda$, obtenemos $y = -5 + 3\lambda$. Entrando con ambos valores en la 2ª ecuación obtenemos $\lambda - 5 + 3\lambda - 4z = -13$, de donde $4\lambda + 8 = 4z$, luego $z = 2 + \lambda$.
La recta "r" en vectorial es $r \equiv (x, y, z) = (\lambda, -5+3\lambda, 2+\lambda)$
$\pi \equiv x + 2y – z = 0$
P es la intersección de "r" y "π". Sustituimos "r" en "π" $\rightarrow (\lambda) + 2.(-5+3\lambda) – (2+\lambda) = 0$, de donde $6\lambda = 12$, por tanto $\lambda = 2$, y **el punto pedido es** P((2), -5+3(2), 2+ (2)) = **P(2,1,4).**
(b)
Halla el punto simétrico del punto Q(1,-2,3) respecto del plano π.

Calculamos la recta "s" perpendicular al plano "π" (Nos sirve como vector director de la recta **u** el vector normal del plano **n**), que pasa por el punto Q.
Calculamos el punto M intercesión de la recta "s" con el plano "π".
El punto M es el punto medio del segmento QQ', siendo Q' el punto simétrico buscado.



Calculamos la recta "s". Punto el Q(1,-2,3), vector director **u** = **n** = (1,2,-1).
Ecuación de "s" en vectorial $s \equiv (x, y, z) = (1+\lambda, -2+2\lambda, 3-\lambda)$

Punto $M = r \cap \pi$ (punto de corte)
De $(1+\lambda) + 2(-2+2\lambda) – 4(3-\lambda) = 0$, obtenemos $6\lambda = 6$, de donde $\lambda = 1$, y el punto M es M(1+(1), -2+2(1), 3-(1)) = M(2, 0, 2)

El punto M(2, 0, 2) es el punto medio del segmento QQ', es decir (2, 0, 2) = ((1+x)/2, (-2+y)/2, (3+z)/2).
De 2 = (1+x)/2, tenemos x = 3.
De 0 = (-2+y)/2, tenemos y = 2.
De 2 = (3+z)/2) , tenemos z = 1

El punto simétrico pedido es Q'(x, y, z) = Q'(3,2,1).